Проблемът за мярката

Всичко е относително, но не всичко е относимо

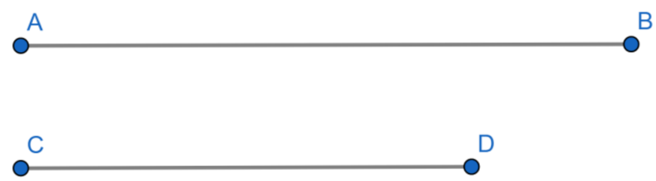
Автор: Д-р Лъчезар П. Томов

Алгоритъмът на Евклид и ирационалните количества

Естествените числа 1, 2, 3... възникват като абстракция на процеса на броене на реално съществуващи неща – винаги краен брой. Четири овце или четири къщи – те заедно споделят свойството четири. Ежедневните задачи обаче не се изчерпват с броене, в тях има измерване на площи и претегляне на стоки, а за нуждите на земеделието – и измерване на времето. Първата стъпка към измерването е да го сведем до преброяване – заради което въвеждаме и мерни единици – мерки. Наличието на множество мерки въвежда хаос в строителството и търговията – превръща различние измервания в изречения на различни езици, на които им липсва точен превод. Колко палеца е една длан, колко длани е една стъпка, колко стъпки е една крачка, колко крачки е един стадий? Проблемът за древните не е този, че палците, дланите, стъпките и крачките *варират*, този, който води до създаването на единици като метъра и килограма. Проблемът за тях е **далеч по-сложен** – *те искат да измерват, като броят*. Най-просто е измерването на дължина по права линия – и всъщност само тя има строга дефиниция за дължина (какво означава дължина при крива линия е въпрос от висшата математика). Според аксиомите на Евклид между две точки може да има само една права линия, съответно **разстоянието между тях** е нейната дължина.

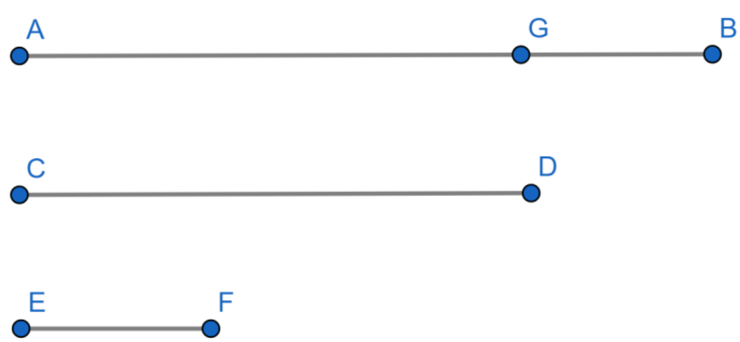
Алгоритъмът на Евклид

Когато търсим обща мярка между две отсечки, най-естественото е да ги сравним – или са равни, или не. Ако са равни, те са мярката. Ако не са, се питаме може ли по-малката да се вмести в по-голямата? Ако се вмества точно 1, 2, 3 или повече пъти, тя е общата мярка. Какво да правим обаче, ако не се вмества точно – (Фиг.1-2). Ако си потърсим нова мярка отвън, било реална, или си начертаем нова, откъде знаем, че тя ще е *точна*? Можем ли да използваме това, което имаме? Остатъкът GB ни пречи (Фиг.2), ако можеше нещо да се вмества в AB *без остатък*, тогава щяхме да намерим обща мярка. Имаме три отсечки – AB, CD и тяхната разлика *GB = AB – CD*. Ако не искаме външна мярка, имаме избор само между тези три отсечки, или техни части (но това е по-сложно, затова няма да ги делим). Първите две не можем да ползваме. Можем да ползваме само остатъка GB. Може ли той да се вмести цял брой пъти – един, два, три или повече в AB? Той вече се вмества веднъж, останалата част е CD – ако тя може да се замести с налагане на GB няколко пъти, то остатъкът ще се вмести цял брой пъти в AB. Той ще е мярка и на CD и на AB. Проверяваме дали това е възможно, като взимаме нова отсечка *EF = CD* (Фиг.3).



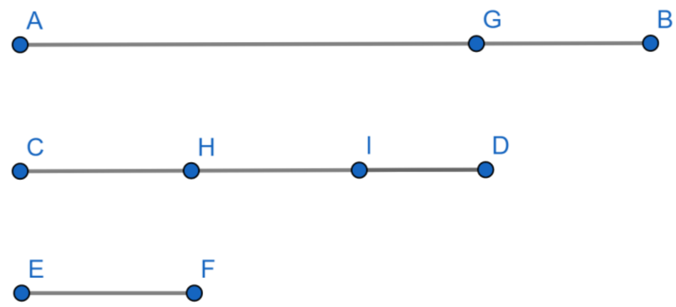
Фигура 1. Алгоритъм на Евклид, стъпка 0

Фигура 2. Алгоритъм на Евклид, стъпка 1



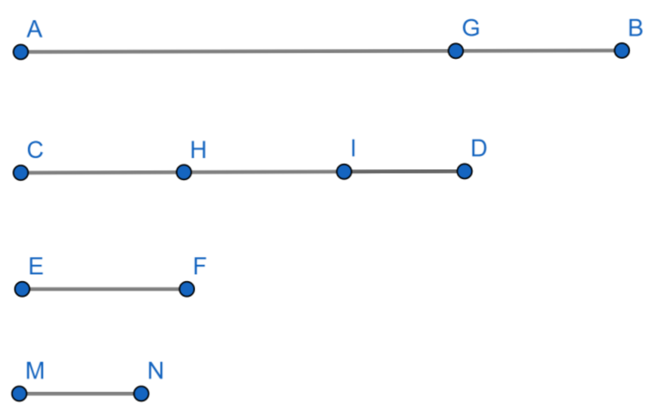
Фигура 3. Алгоритъм на Евклид, стъпка 2

За съжаление надеждите ни не се оправдават (Фиг.4). EF се нанася 2 пъти в CD и остава остатък ID. *GB = EF* не е нашата мярка.



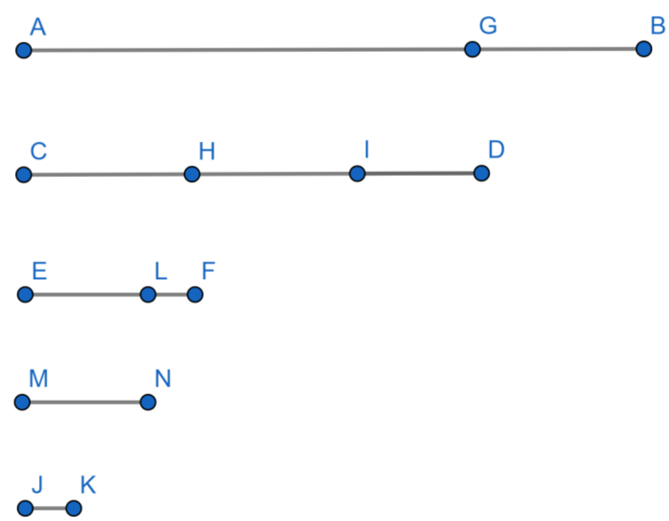
Фигура 4. Алгоритъм на Евклид, стъпка 3

Да спрем ли дотук? Или да потърсим външна мярка? Да спрем означава да се признаем за безсилни, а външната мярка ще трябва *всеки път да измисляме наново за всяка отделна дължина*. Остатъкът ID в CD се вмества веднъж (Фиг.5). Ако той се вмества в EF цял брой пъти, ще получим ситуация сходна с тази с GB, CD и AB. Тогава ID ще измерва EF и оттам CD, но и остатъка *GB = EF* (Фиг.6). Измерваме третата отсечка (разликата на първите две) и оттам измерваме втората И първата. Действаме *рекурсивно* – използваме новия остатък (разликата *ID = CD = CI*) като обща мярка на последните две отсечки и чрез него можем да измерим и всички предишни, като се връщаме стъпка по стъпка назад.



Фигура 5. Алгоритъм на Евклид, стъпка 4

За съжаление обаче планът ни на този етап е неуспешен – *ID = MN* се вмества веднъж в EF и оставя остатък LF. Тук имаме същата ситуация, както с CD и остатъка ID и както с AB и остатъка GB. Остава ни надеждата, че най-новият остатък *JK = LF* ще измери предишния *MN = ID* и съответно CD, както и *EF = GB*. Така ще се върнем чак на първата отсечка, която ще бъде измерена като кратна на LF. А какво да правим и ако това е неуспешно и имаме нов остатък? Продължаваме напред по същата схема, наречена *алгоритъм на Евклид* – всеки път вадим малката отсечка от голямата и взимаме разликата (остатъка) като нова обща мярка – т.нар. antanaireisis. *Все някога процесът би трябвало да спре*, надяваме се.



Фигура 6. Алгоритъм на Евклид, стъпка 5

Въпросът дали този алгоритъм някога ще прекрати успешно своята е работа и ще намери тази обща мярка за всички отсечки (остатъци) по пътя е основата на проблема за мярката. Той има еднозначен положителен отговор в случая на целите числа – защото всяко цяло число е кратно на 1 – единицата го измерва. Да вземем две прости числа – 17 и 23. Разликата е 23-17=5. Може ли 5 да измери 17? Изваждаме 5, остава 12. Изваждаме 5, остава 7. Изваждаме 5, остава 2. Може ли 2 да измери 5? Изваждаме числата така както изваждахме отсечки, последователно по-малкото от по-голямото, търсейки всеки път новия остатък дали ще може да измерва предишния (1)

$$23-17=5$$

$$17-5=12$$

$$12-5=7$$

7-5=2

5-2=3

3-2=1

2-1=1

1-1=0

(1)

Получихме, че 1 се вмества в 2 два пъти, така в три то ще се вмества 3 пъти, в 5 пет пъти и т.н. Оказва се, че 17 и 5 нямат друго помежду си освен 1-цата. Това е логично, защото те са прости числа, делят се само на себе си и на 1, кратни са само на 1-цата. Съвсем друг ще е случаят, ако вземем две четни числа, например 28 и 60:

60-28=32

32-28=4

28-4=24

24-4=20

20-4=16

16-4=12

12-4=8

8-4=4

4-4=0

(2)

И двете числа се делят на 4, то е тяхната обща мярка. Нещо повече, то е тяхната **най-голяма** обща мярка. Защо е най-голяма – да се върнем на Фиг. 2 и да си представим, че остатъкът *GB = AB – CD* измерва точно AB и CD като обща мярка – да се вмества няколко пъти в AB и по-малък брой пъти в CD. Ако има друга отсечка XY > GB, която да измерва AB и CD като обща мярка, тя трябва да измерва и GB – да се вмества цял брой пъти, но така получихме абсурд – по-голямото XY да измерва по-малкото GB, следователно предположението, че съществува XY > GB ни е грешно. Не може да има по-голяма мярка от получената чрез изваждане на отсечки по алгоритъма на Евклид. Това се нарича *доказателство с достигане до противоречие – reductio ad absurdum.* То играе главна роля в античната философия, за което ще разкажем по-надолу. Едно такова доказателство може да е опасно. С него можем да докажем, че 1 е най-голямото естествено число:

Нека допуснем противното – 1 не е най-голямото естествено число. Нека кръстим най-голямото естествено число $x > 1$. Нека го повдигнем на квадрат (втора степен) – x^2, Тъй като то е по-голямо от едно $x > 1$, то квадратът му ще е по-голям от него $x^2 > x$. Това означава, че ще има по-голямо число от най-голямото число, което е абсурд. Стигнахме *до противоречие, понеже допуснахме, че 1 не е най-голямото число, следователно допускането ни е грешно. Така доказахме, че 1 е най-голямото естествено число.*

Защо се получи логически коректно доказателство на абсурдно твърдение – защото *допуснахме,* че естествените числа имат най-голям елемент. Такъв те нямат и това е *потенциалната безкрайност* – винаги има още едно число. Имат обаче най-малко число. Единицата е най-малката обща мярка – най-малкото естествено число. Наличието на най-малко число е много важно – така знаем, че процесът на изваждане със сигурност ще стигне за краен брой стъпки – в най-лошия случай то ще е общата мярка. Има ли обаче най-малка дължина на отсечка? Какво ни подсказва интуицията, като гледаме Фиг.1-Фиг.6? Отговорът се крие в Теоремата на Питагор.

Теоремата на Питагор

Дълго време първите математици от школата на Питагор и самият Питагор смятали, че има и така всичко в природата е съотношение на цели числа – общата мярка се вмества *n* пъти в по-малката отсечка и *m* пъти в по-голямата, така те са в съотношение *m:n*. Това приключва с теоремата на Питагор (открита във Вавилон, но първото доказателство за верността ѝ дават питагорейците). В "Елементи" на Евклид[i], тя се доказва в книга I – на Фиг.7. Основата на доказателството е чрез еднаквите триъгълници FBC и ABD да се докаже, че площта на правоъгълника BLDJ е равна на тази на квадрата FBAG. Триъгълниците са еднакви по две страни (съответни страни на квадрати BC = BD и AB = FB, с ъгъл между тях равен на 90 градуса + ABC (FBC = FBA + ABC = 90 + BC = ABC + CBD). Еднаквите триъгълници имат равни площи, които са половината от съответните правоъгълници, тъй като височините в триъгълниците (DL в ABD и FG в ABC) са височините на BLDJ и FBAG, а основите са широчините им. По същия метод, посредством еднаквите триъгълници ACE и BCK, се доказва и че квадратът ACKH има същата площ като на правоъгълника JLEC, с което е доказано, че квадратът на хипотенузата е равнолицев с квадратите на двата катета, или поради формулата за лице на квадрат:

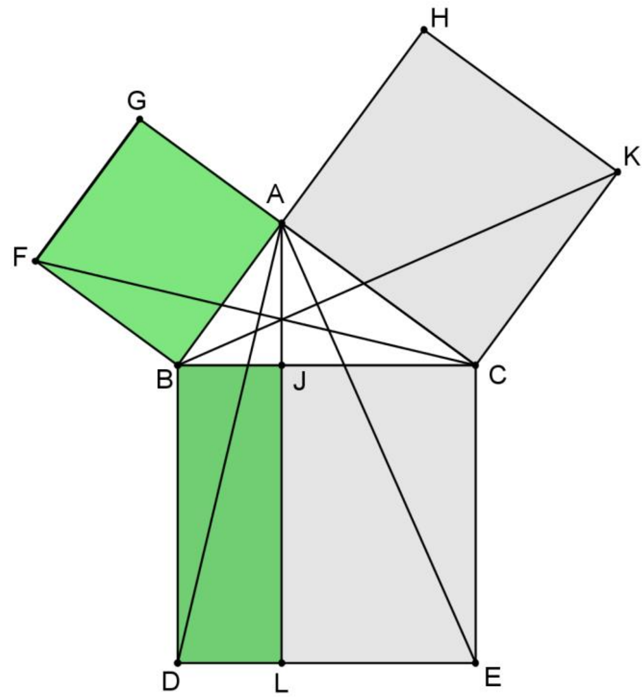
$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{3}$$

Ето и текста на оригиналното Предложение и доказателството към него:

> **Книга I, Предложение 47:**
>
> *В правоъгълните триъгълници квдратът върху страната, разположена срещу правия ъгъл е равен на (взетите заедно) квадрати върху страните, които сключват правия ъгъл.*
>
> *Нека ABC е правоъгълен триъгълник, който има прав ъгъл BAC; аз твърдя, че квадратът върху BC е равен на (взетите заедно) квадрати върху BA и AC (Фиг.7).*

Действително да построим върху BC квадрата BDEC, а върху BA, AC да построим (квадратите) GB, HC (Предложени 46) и през точка A да прекараме AL, успоредна както на BD, така и на CE; Да съединим AD, FC. И понеже всеки от ъглите BAC, BAG е прав (Деф.10), ето че с някаква права BA двете прави AG, AC, разположени не от една и съща страна, образуват в точката ѝ A съседни ъгли, равни (заедно) на два прави ***(ъгъла – бел.ред)****; Следователно CA ще лежи на (една) права с AG (Предложение 14). Вследствие на същото и BA ще лежи на една права с AG. И понеже ъгъл DBC е равен на ъгъл FBA, тъй като всеки от тях е прав (Аксиома 1), да прибавим общия ъгъл ABC; Следователно целият ъгъл DBA е равен на целия FBC (Аксиома 2). И понеже DB е равна на BC, а FB е равна на BA (Дефиниция 22), ето две страни DB, BA, равни на две страни BC, FB, всяка на всяка; ъгъл DBA е равен на ъгъл FBC; следователно и основата (Предложение 4) AD е равна на основата FC, и триъгълникът ABD е равен на триъгълника FBC (Предложение 4). И удвоеният триъгълник ABD е успоредникът BL (Предложение 41), защото те имат една и съща основа BD и са разположени между едни и същи успоредни BD, AL* ***(имат една и съща височина – бел.ред)*** *(Предложение 41). Удвоеният пък триъгълник FBC (Предложение 41) е квадратът GB, защото те имат една и съща основа FB и са разположени между едни и същи успоредни FB и GC* ***(имат една и съща височина – бел.ред)****; [но удвоените на равни величини са равни помежду си (Аксиома 5)]; следователно и успоредникът BL е равен на квадрата GB. По подобен начин, като се съединят AE, BK, ще се докаже, че и успоредникът CL е равен на квадрата HC; следователно целият квадрат BDEC е равен на двата квадрата GB и HC, взети заедно. Но BDEC е квадратът, построен върху BC, а GB, HC – върху BA, AC; следователно квадратът върху страната BC е равен на (взетите заедно) квадрати върху страните BA, AC.*

И така в правоъгълните триъгълници квадратът, върху страната, разположена срещу правия ъгъл, е равен на (взетите заедно) квадрати върху страните, които сключват правия [ъгъл]; което и трябваше да се докаже (72, 73).



Фигура 7. Теорема на Питагор, Елементи, Книга I, Предложение 47

Доказателството е значително по-дълго, отколкото сме свикнали за такава теорема, като има и значително позоваване на предишни Предложения, дефиниции аксиоми дори за такива „тривиални“ твърдения като Аксиома 2 и Аксиома 5:

> ***Аксиома 2:***
>
> *Равните на едно и също са равни и помежду си*
>
> ***Аксиома 5:***
>
> *И удвоените на едно и също са равни помежду си*

От тези две аксиоми може да се изведе за всякакво умножение на две равни величини

n.x = n.y.

Дефиниция 10 е за перпендикулярна линия, като сключваща два равни ъгъла с друга линия:

> ***Дефиниция 10:***
>
> *Когато права, издигната върху (друга) права, образува един до друг ъгли, равни помежду си, всеки от равните ъгли е прав, издигнатата права се нарича перпендикуляр към тази, върху която е издигната*

Дефиниция 22 дава определението за квадрат:

> ***Дефиниция 22:***
>
> *Измежду четиристранните фигури квадрат е такава, която е и равностранна, и правоъгълна...*

Предложение 4 се отнася за първия признак на еднаквост на два триъгълника (там се доказва той), който се ползва в това доказателство – по две страни и ъгъл между тях.

Предложение 14 се отнася за случаите, когато две прави от двете страни на трета права лежат на една права – когато сборът от ъглите с третата права е 180 градуса или два прави ъгъла. На Фиг.7 AC и AG лежат от двете страни на AB и сключват с нея прави ъгли, следователно AC и AG лежат на една права линия.

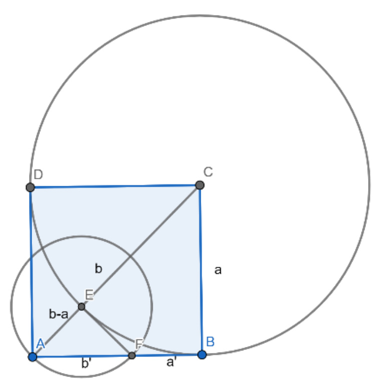
Предложение 41 се отнася до лицето на триъгълника, като половината от лицето на успоредника със същата страна и височина.

Предложение 46 демонстрира как се построява с линия и пергел квадрат върху дадена права – то се използва за чертежа на Фиг.7

Цялата първа книга е построена последователно, а теоремата на Питагор е нейната кулминация и завършек. Всяка дефиниция и аксиома са обмислени грижливо и сложени в основата на разсъждението, а доказателствата на всяко предложение са възможно най-изчерпателни и строги логически, обхващащи общия случай и демонстриращи недвусмислено твърденията. Доказателството е демонстрация, публично изтъкване на доводи, които другите да приемат за неоспорими. Питагорейците са първите математици в историята и те поставят логическите основи на науката, като гърците доказват и най-очевидно изглеждащи твърдения като това, че диаметърът дели окръжността на две равни части. Подобна взискателност е *безпрецедентна* в историята дотогава и е свързана с уникалната гръцка култура и логиката в нейната основа.

Ирационалните величини

Скоро след доказването на Теоремата на Питагор, философите (mathēmatikoi) от нея открили, че някои страни на дадени фигури не са съизмерими с други. Те опитали да приложат antanaireisis върху диагонала на квадрата (Фиг.8):



Фигура 8. Последователно изваждане на отсечки при съизмерване на диагонала на квадрата *b* и страната му *a*[ii]

За да определим разликата между диагонала на квадрата *b* и дължината на страната на квадрата *a*, използваме пергел, с който начертаваме окръжност около точка C с радиус *r* = *a*. Тя се пресича с диагонала в точка E и го разделя на две отсечки – *CE* = *a* и *EA* = *b* – *a* – разликата между диагонала и страната на квадрата. Ако искаме да продължим процеса на изваждане, от точка E чертаем окръжност с радиус *r* = *b* – *a* и тя се пресича с AB в точка F. Триъгълникът AEF е равнобедрен, правоъгълен триъгълник – половин квадрат, тъй като върхът E лежи на диагонала на AB и ъгълът при основата EAB е 45 градуса. Така

$$AE = EF = FB = a' = b - a$$
$$AF = b' = a - (b - a) = 2a - b$$

(4а)

Тук AE е страна на новия, по-малък квадрат, а *AF* – неговият диагонал. Равенството $EF = FB$ следва от това, че триъгълниците CEF и CBF са правоъгълни, $CE = CF = a$, а CF (неначертана) е обща за тях. Този признак за еднаквост на правоъгълни триъгълници следва от това, че EBC е равнобедрен, с което ъглите при основите са равни – $CEB = CBE$, а оттам и ъглите FEB и FBE, които ги допълват до правите ъгли CEF и CBF също са равни:

$$CEF = CEB + FEB = 90$$
$$CBF = CBE + FBE = 90$$

(4б)

Страната на големия квадрат е сумата от страната и диагонала на малкия (Фиг.8)

$$a = AF + FB = a' + b'$$
$$b = CE + AE = a + a' = a' + b' + a' = 2a' + b'$$

(5)

Тъй като можем да повторим този процес и пак да извадим страната от диагонала, можем да сменим нотацията[iii]:

$$a = a_1 + b_1$$
$$b = 2a_1 + b_1$$

(6)

Още няколко повторения на този процес биха ни убедили, че той може теоретично да продължава безкрайно (ако можехме да чертаем с безкрайна точност). Всяка нова страна на квадрат може да се раздели на страна и диагонал по този начин:

$$a_n = a_{n+1} + b_{n+1}$$
$$b_n = 2a_{n+1} + b_{n+1}$$

(7)

В тази посока всеки нов квадрат е все по-малък и по-малък от предишния.

Всеки опит да установим крайно съотношение между страната на диагоналите, води до същата рекурентна зависимост:

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{2a_{n+1} + b_{n+1}}{a_{n+1} + b_{n+1}} = \frac{a_{n+1} + b_{n+1} + a_{n+1}}{a_{n+1} + b_{n+1}} = \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{a_{n+1} + b_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_{n+1} + b_{n+1}} = 1 + \frac{a_{n+1}}{a_{n+1} + b_{n+1}}$$
$$= 1 + \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}} \frac{1}{\frac{a_{n+1}}{a_{n+1}} + \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}}$$

(8)

Какво можем да направим тук? Можем да заместим $\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$ във формулата с израза за него:

$$\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{b_{n+2}}{a_{n+2}}}$$

(9а)

Тук съотношението на диагонала и страната на текущата стъпка $n + 1$ зависи от съотношението на следващата стъпка $n + 2$. Можем да продължим процеса, показан на Фиг.8. и да заместваме на всяка стъпка с израз, подобен на (9а):

$$\frac{b_n}{a_n} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}} = 1 + \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{1 + \frac{b_{n+2}}{a_{n+2}}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{b_{n+2}}{a_{n+2}}}}$$

(9б)

Това не ни доведе до желаната дроб. Може би, ако повторим още веднъж?

$$\frac{b_n}{a_n} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{1 + \frac{b_{n+3}}{a_{n+3}}}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{b_{n+3}}{a_{n+3}}}}}$$

(9в)

Процесът може да продължи безкрайно и променяйки се, остава същият. Така желаното съотношение на цели числа между диагонала и страната на квадрата се превръща в безкрайна (верижна) дроб:

$$\frac{b_n}{a_n} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cdots}}}}}$$

(9г)

Това важи за всяко n, така че можем да напишем:

$$\frac{b}{a} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cdots}}}}}$$

(10)

Така е с диагонала на квадрат със страна 1. Процесът на съизмерване с antanairesis продължава *безкрайно*. Питагорейците, като стожери на логиката не приели (10) за доказателство – трябвало да се докаже чрез достигане до противоречие – reduction ad absurdum.

Квадратът на неговата дължина по теоремата на Питагор е:

$$c^2 = a^2 + b^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \tag{11}$$

Доказателство с достигане до противоречие

Нека приемем, че $\sqrt{2}$ може да се представи като някаква дроб, подобна например на $\frac{10}{6}$.[iv] Тази дроб може да опростим чрез съкращаване, докато получим числител a и знаменател b, които не могат повече да се разделят едно с друго и да се съкращават. Дробта наричаме **несъкратима.** Едното от тях трябва да е четно, а другото нечетно, защото ако и двете са четни, могат още да се съкратят:

$$\frac{2k}{2m} = \frac{k}{m} \tag{12a}$$

$$\frac{10}{6} = \frac{2.5}{2.3} = \frac{5}{3} \tag{12б}$$

Нека

$$\sqrt{2} = \frac{b}{a} \tag{13а}$$

Можем да вдигнем и двете страни на квадрат и да получим:

$$2 = \frac{b^2}{a^2} \tag{13б}$$

$$b^2 = 2a^2 \tag{13в}$$

Тук виждаме, че b^2е четно число, което може да се получи в резултат на умножение само на две четни числа и тъй като $b^2 = b.b$, то и b ще е четно число.

Тогава можем да заместим b с $2k$:

$$(2k)^2 = 2a^2 \tag{14а}$$

$$4k^2 = 2a^2 \tag{14б}$$

Можем да разделим на 2 двете страни на уравнението:

$$4k^2 = 2a^2 |: 2 \tag{14в}$$

$$2k^2 = a^2 \tag{15}$$

Така получихме, че a^2 също е четно число, оттам и a е четно число. Тъй като по условие приехме, че не може едновременно и a, и b да са четни числа, тъй като така биха се съкратили, а дробта $\frac{b}{a}$ е най-малката възможна, след всички направени съкращения, стигнахме до **противоречие**. Приехме по условие, че дробта $\frac{b}{a}$ е несъкратима, защото се състои от четно и нечетно число в числител и знаменател, които не се делят едно на друго и след поредица от верни стъпки стигнахме до това, че все пак дробта е съкратима, **следователно нашето допускане е грешно**. $\sqrt{2}$ не може да се представи чрез дроб, чрез съотношение на цели числа. То е несъизмеримо с числото 1 и с което и да е друго рационално число, цяло или дроб. Това днес наричаме „ирационално число“. Рационално идва от латинското ratio – съотношение. Познаваемо е (чрез логиката) онова, което е съотносимо.

Ирационалност и познаваемост при Платон

Платон редовно дава примери с диагонала на квадрата, като непознаваема величина[v]:

> *„С о к р а т: Добре, не е лесно, но да се постарая заради тебе. Повикай ми от твоите много слуги един, когото искаш, за да ти покажа в него това, което искаш.*
>
> *М е н о н: Разбира се (към един роб). Приближи се.*
>
> *С о к р а т: Елин ли е и говори ли елински?*
>
> *М е н о н: Да -да, родил се е вкъщи.*
>
> *С о к р а т: Внимавай тогава кое от двете ще ти се стори, че прави – дали си припомня, или научава от мене.*
>
> *М е н о н: Добре, ще внимавам.*
>
> *С о к р а т: Е, кажи ми, момче, знаеш ли, че квадратът е такъв?* ***(начертава квадрат – бел.ред.)***
>
> *Р о б ъ т: Да.*
>
> *С о к р а т: Следователно квадратът е с четири равни страни като всички тези, нали?*
>
> *Р о б ъ т: Точно така.*
>
> *С о к р а т: Нали и тези, които минават през средата, са равни?*
>
> *Р о б ъ т: Равни са.*
>
> *С о к р а т: Тогава би ли било възможно една такава фигура да бъде и по-голяма, и по-малка ?*
>
> *Р о б ъ т: Разбира се.*
>
> *С о к р а т: Следователно, ако тази страна беше две стъпки и тази две, колко стъпки* ***(площ – бел.ред)*** *би била цялата фигура? Гледай тука: ако тази беше две стъпки, а тази само една, нещо друго ли, или веднъж по две стъпки би било тази фигура* ***(Фиг.9 – бел.ред)****?*
>
> *Р о б ъ т: Да.*
>
> *С о к р а т: Но понеже и тази страна е две стъпки, то цялото става два пъти по две или нещо друго?*
>
> *Р о б ъ т: Да, става.*
>
> *С о к р а т: Значи става два пъти по две стъпки?*
>
> *Р о б ъ т: Да.*
>
> *С о к р а т: Тогава колко са двете стъпки по две?*
>
> *Пресметни и отговори.*

Р о б ъ т: Четири, Сократе.

С о к р а т: Добре, а не би ли могло от тази фигура да има друга, двойно по-голяма, такава една, с четири еднакви линии като тази?

Р о б ъ т: Би могло.

С о к р а т: Колко стъпки ще има?

Р о б ъ т: Осем.

С о к р а т: Хайде тогава, опитай се да ми кажеш колко дълга ще е всяка страна на тази фигура. Тази тук е две стъпки. А онази, двойно по-голяма ли?

Р о б ъ т: Значи ясно е, Сократе, двойно по-голяма.

С о к р а т: Виждаш ли, Меноне, че аз на нищо не го уча, а само го питам? И сега той си мисли, че знае коя е дължината, от която би се образувала фигура от осем стъпки. Или не ти се струва така.

М е н о н: Така ми се струва.

С о к р а т: В такъв случай той знае ли?

М е н о н: Естествено, не.

С о к р а т: Но все пак предполага, че е от двойно по-дългата ли?

М е н о н: Да.

Со к р а т: Гледай тогава как той ще си припомня по ред това, което трябва да се припомня (към роба). Ей, ти, отговори ми: твърдиш, че от двойно по-дълга линия се получава двойно по-голяма фигура? Искам да кажа да не е от едната страна дълга а от другата – къса, ами отвсякъде да е равна: както тази тук, но двойно по-голяма, от осем стъпки. Но гледай, дали ще ти се струва, че ще бъде двойно по-голяма поради двойно по-дългата линия?

Р о б ъ т: Да.

С о к р а т: Тогава тази линия става ли двойно по-дълга от тази, ако прибавим тук друга, също толкова дълга?

Р о б ъ т: Разбира се.

С о к р а т: Значи от тези линии, твърдиш ти, фигурата ще стане осем стъпки, ако има четири толкова дълги страни, така ли?

Р о б ъ т: Да.

С о к р а т: Тогава да дочертаем квадрата с четири равни линии. Нещо друго ли или точно това твърдиш ти, че е осемстъпковата фигура?

Р о б ъ т: Точно това.

С о к р а т: Нали в нея тия страни са четири, всяка от които е равна на четири стъпки?

Р о б ъ т: Разбира се.

С о к р а т: Тогава колко стъпки прави? Не прави ли четири пъти по толкова?

Р о б ъ т: Прави, как да не прави!

С о к р а т: Следователно четири пъти по толкова нещо е двойно по-голямо, така ли?

Р о б ъ т: Не, кълна се в Зевс!

С о к р а т: А колко пъти по-голямо?

Р о б ъ т: Четири пъти по-голямо.

С о к Р ат: Значи, момчето ми, от двойно по-дългата страна, не двойно по-голяма, ами четири пъти по-голяма става фигурата.

Р о б ъ т: Правилно казваш.

С о к р а т: Защото четири пъти по четири е шестнайсет. Не е ли?

Р о б ъ т: Да.

С о к р а т: А осемстъпковата фигура от каква линия се образува? Нали от тази линия се получи четири пъти по-голям квадрат?

Р о б ъ т: Да.

С о к Р а т: А ето тази четиристъпкова фигура от половината на тази ли линия.

Р о б ъ т: Да.

С о к р ат: Добре. Но осемстъпковата фигура не е ли двойно по-голяма от тази тук, и не е ли половината от тази?

Р о б ъ т: Така е.

С о кр а т: Нали тя е със страна по-дълга от тази линия и по-къса от тази тук? Или не?

Р о б ъ т: Според мене така ще бъде.

С о к Р а т: Хубаво. Сега каквото ти се стори, това ми отговаряй: нали тази тук е дълга две стъпки, а тази четири?

Р о б ъ т: Да.

С о к р а т: Следователно, ако едната страна е три стъпки и другата три, цялата фигура става три пъти по три стъпки, така ли?

Р о б ъ т: Очевидно.

С о к р а т: Три по три колко стъпки са?

Р о б ъ т: Девет.

С о к р а т: А трябва да е двойно по-голяма и от колко стъпки?

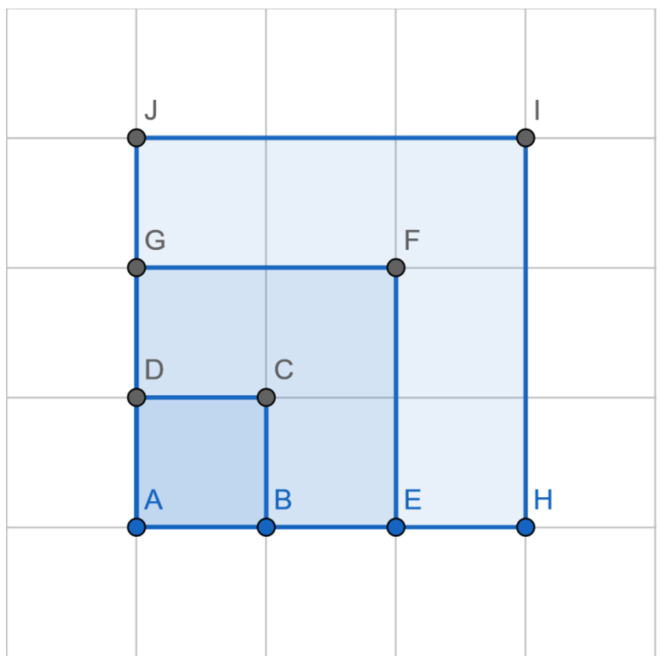
Р о б ъ т: От осем.

С о к р а т: Значи осемстъпковата фигура не се получава от страна от три стъпки.

Р о б ъ т: Не, разбира се.

С о к р а т: А от каква? Опитай се да ни отговориш точно. И ако не искаш да пресмяташ, посочи ни от коя?

Р о б ъ т: Но кълна се в Зевс, Сократе, аз нищо не знам.“



Фигура 9. Квадрати с единична, двойна и тройна страна – вторият е с четири пъти по-голяма площ, а третият – с девет пъти по-голяма. Квадрат с осем пъти по-голяма площ трябва да има между два пъти и три пъти по-голяма страна

Непознаваемостта на диагонала на квадрата става повратна точка в античната (гръцка) философия. Тя прекършва надеждите на Питагорейците, че всичко в природата може да се опише със съотношения на цели числа, надежди, породени от музиката и астрономията. Хармоничните акорди в диатоничната (питагорейска) гама като октавата (2:1), квинтата (3:2) и квартата (4:3) и техните производни били съотношения на цели числа. Подобно е съотношенито на периодите на Юпитер и Сатурн – 2:1. Питагор предлага хипотезата за musica universalis – „музика на небесните сфери“, базирана вероятно на подобни наблюдения (множество подобни резонанси откриват през 18-и и 19-ви век астрономи и математици като Лаплас). Според нея всяка планета излъчва тон на собствена честота, който човешките уши не могат да чуят, но който влияе върху съдбите на хората на Земята. Диагоналът на квадрата, а скоро и други открити подобни *непознаваеми* (ирационални) числа слагат край на надеждите за хармонично описание на света. Той става и главен пример във философията на Платон за границите на човешкото познание: *„Но кълна се в Зевс, Сократе, аз нищо не знам.“* Доказателството с достигане до противоречие reduction ad absurdum става основа на цялата Платонова диалектика с най-блестящ пример диалога „Парменид“[vi] и надежден инструмент във философията и до ден-днешен. Честъртън ползва този подход във „Вечният човек“.[vii] Остава въпросът защо елините смятат ирационалните числа за „непознаваеми“ и какви са последствията за математиката от това.

Потенциална и актуална безкрайност и теория на пропорциите

Аристотел различава два вида безкрайност – потенциална и актуална. За съществуването на две безкрайности, той пише в Метафизика[viii], книга 3, глава 4:

> *„Възгледите, които собствено му принадлежат, са от една страна, замяната на безкрайното, като едно с неопределената диада, и същевременно приемането, че безкрайното се състои от Голямо и Малко“.*

В тази глава той изяснява откъде възниква идеята за безкрайността:

> *От тези съображения става ясно, че разследването засяга физика. Нито без причина всички го правят принцип или източник. Не можем да кажем, че безкрайността няма ефект и единствената ефективност, която можем да му придадем, е тази на принципа. Всичко е или източник, или произлиза от източник. Но не може да има източник на безкрайното или безграничното, защото това би било негова граница. Освен това, тъй като е начало, той е едновременно несъздаваем и неразрушим. Защото трябва да има момент, в който това, което се е случило, достига до завършване, а също и до прекратяване на всички отминаващи. Ето защо, както казваме, няма принцип за това, но именно този се счита, че е принципът на други неща и да обхваща всички, и да управлява всички, както твърдят тези, които не признават, заедно с безкрайността, други причини, като Ум или Приятелство. По-нататък те го идентифицират с Божественото, защото е „безсмъртно и нетленно“, както казва Анаксимандър, с по-голямата част от физиците.*
>
> *Вярата в съществуването на безкрайността идва главно от пет съображения:*
>
> *(1) От природата на времето – защото е безкрайно.*

(2) От разделението на величините – за математиците се използва и понятието за безкрайността.

(3) Ако появата ***(придобиване на съществуване – бел. ред.)*** *и изчезването не се изчерпва*[ix]*, то е само защото онова, от което произлизат нещата, е безкрайно.*

(4) Тъй като ограниченото винаги намира своята граница в нещо, така че не трябва да има граница, ако всичко винаги е ограничено от нещо различно от себе си.

(5) Най-вече причина, която е особено подходяща и представя трудността, която се усеща от всички – не само число, но и математически величини и това, което е извън небето се предполага, че е безкрайно, защото те никога не се изчерпват в нашата мисъл.

За потенциалната безкрайност той пише в Метафизика, книга 3, глава 6:

Сега, както видяхме, величината всъщност не е безкрайна. Но чрез разделяне е безкрайно. (Няма трудности в опровергаването на теорията за неделимите линии.) Тогава остава алтернативата, че безкрайността има ***потенциално съществуване****.*

Но фразата „потенциално съществуване“ е двусмислена. Когато говорим за потенциалното съществуване на статуя, имаме предвид, че ще има действителна статуя. С безкрайността не е така. ***Няма да има актуална безкрайност****. Думата "е" има много сетива и ние казваме, че безкрайността "е" в смисъла, в който казваме "ден е" или "това са игрите", защото едно след друго винаги се появява. За тези неща също има разлика между потенциалното и актуалното съществуване. Ние казваме, че има олимпийски игри, както в смисъл, че могат да се случат, така и че всъщност се случват.*

Безкрайността се проявява по различни начини – във времето, в поколенията на човека и в разделението на величините. Защото безкрайността има този начин на съществуване: едно нещо винаги се взема след друго и всяко нещо, което е взето, винаги е ограничено, но винаги различно. Отново, „битието“ има повече от един смисъл, така че не трябва да разглеждаме безкрайността като „това“, като човек или кон, а трябва да предполагаме, че съществува в смисъла, в който говорим за деня или игрите като съществуващи неща, чието същество не е стигнало до тях като това на вещество, а се състои в процес на възникване или отминаване; определено на всеки етап, но винаги различно.

Моето обяснение на разликата между двете:

Потенциална и актуална безкрайност с Чък Норис:
1) Питали Чък Норис колко лицеви опори може да направи и той

отговорил:
- Винаги мога още една.
Това е потенциална безкрайност.
2) Питали Чък Норис колко лицеви опори може да направи и той отговорил:
- Всичките!
Това е актуална безкрайност.
Отговорът има удивителна, защото тя е удивителна.

Потенциалната безкрайност е като природата на естествените числа – от всяко естествено можем да получим следващо, чрез добавяне на единица. Процесът може да продължи потенциално до безкрай. Актуалната безкрайност е завършената потенциална безкрайност – **изчерпване на неизчерпваемото**. Философите и математиците в древна Елада не са намерили строго логическо описание за нея и са я „изгонили“ от математиката – най-вече Парменид и Зенон с неговите 41 апории. Последствията за математиката, физиката и гръцката философия и култура са значими – определящи за бъдещето на гръцката наука.

Теория на пропорциите

Ирационалните числа хвърлили в криза гръцката философия и математика. Защо това е така, може да се види от стойността на $\sqrt{2} = \frac{b}{a}$, получена след многократни опити за съизмерване чрез antanaireisis (алгоритъмът на Евклид):

$$\sqrt{2} = \frac{b}{a} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cdots}}}}} \tag{16}$$

Опитите да се установи точната стойност на диагонала на квадрата (който по теоремата на Питагор при единична страна е $\sqrt{2}$) отиват в безкрайността и тъй като тя е потенциална, а не актуална, те са **неуспешни**. Няма такова число – това е изводът при стриктното приемане на потенциалната безкрайност. Операцията по намиране на обща мярка между диагонала и страната на квадрата, макар и потенциално да може да продължи безкрайно, числото не може да се третира като завършено, като *точно познато*, с обща мярка в безкрая. Намирането на страна на квадрат с известна площ невинаги е успешно, за разлика от намирането на площ по дадена страна. Повдигането на квадрат *не е обратимо*.

От кризата ги спасил Евдокс Книдски – най-великият древен математик след Архимед и неговата теория на пропорциите, съдържаща се в Книга V. Там, където няма единствена обща мярка, той намерил две, чрез които да изрази съотношения между ирационални количества:

Дефиниция 5:

Казва се, че величини се намират в едно и също отношение: първата към втората и третата към четвъртата, когато равнократни на първата и третата са едновременно по-големи или едновременно равни, или едновременно по-малки от равнократни на втората и четвъртата, всяка на всяка, при каквито и да е кратности, ако се вземат в съответен ред (9,10,11,12).

Според дефиницията пропорцията $a: b = c: d$ означава, че:

От

$$na > mb \tag{17а}$$

винаги следва

$$nc > md. \tag{17б}$$

От

$$na = mb \tag{17в}$$

винаги следва

$$nc = md.$$

От

$$na < mb \tag{17г}$$

винаги следва

$$nc < md.$$

Защо е тази сложна структура?

Както Ван дер Варден отбелязва, гръцките математици са разбирали пропорцията като свързана с алгоритъма на Евклид. Пропорцията $a: b = c: d$ означава, че можем толкова пъти да извадим b от a, колкото d от c (приемаме, че $a > b$ и $c > d$) и същото важи за остатъците, т.е. целият процес на последователно изваждане antanairesis е еднакъв, като получените остатъци ще са пропорционални. Например, в пропорцията $3: 2 = 6: 4$, $6 - 4 =$

2 и $3 - 2 = 1$ и двете се изваждат по веднъж, а остатъците 2 и 1 са пропорционални. Това се разбира по-лесно, ако си ги представим като дроби:

$$\frac{6}{4} = \frac{3.2}{2.2} = \frac{3}{2}$$

(18)

Двете пропорции в случая са едни и същи, защото едната пропорция $a{:}b$ е другата, умножена по 2 – $6{:}\,4 = 2.3{:}\,2.2$ В случая с рационална пропорция две пропорции са равни, ако в едната първата и втората, взети с 1 равно кратно -2 са равни съответно на третата и четвъртата. Това е доста различно от Дефиниция 5, защото тук всички числа в пропорциите са цели и са по дефиниция с обща мярка от 1 (кратни на 1). Дефиниция 5 е създадена за ирационални съотношения. Тя ползва Дефиниция 4:

Дефиниция 4:

Казва се, че величините имат отношение помежду си, когато те, взети кратно, могат да се надминат една друга (5,6,7,8).

Какво означава това? Ще дадем пример с диагонала на квадрата. Той е в съотношение $\sqrt{2}{:}\,1$ със страната. Ако тази страна се удвои, тя ще надмине дължината на квадрата му. Можем да използваме това съотношение, както и известното преобразуване на радикали (корени) (19), за да тестваме дефиницията с ирационални съотношения:

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{1}$$

(19)

Имаме $2{:}\,\sqrt{2} = \sqrt{2}{:}\,1$. Тук 1 взето два пъти $2.1 = 2$ надминава $\sqrt{2}$, т.е. в $n.\sqrt{2}{:}\,m.1$ $m = 2$ и $n = 1$. Така е и за $2{:}\,\sqrt{2}$ – $\sqrt{2}$, взето два пъти, надминава 2 – $2.\sqrt{2} > 2$. Това спазва изискването в дефиниция 5 за едновременното надвишаване – тук втората и четвъртата величина след удвояване са едновременно по-големи от първата и третата. За да е спазена дефиницията обаче, тази едновременност трябва да се спази при **всякаква** кратност – за произволни m и n.

Тази дефиниция е свързана и с аксиомата на Архимед, която казва, че за всяко m съществува n, при което ако $na \leq mb$, $(n+1)a > mb$, т.е. ако вземем едната величина достатъчен брой пъти, тя ще надмине другата -n е недостатъчен, но $n + 1$ е достатъчен. На това се обляга неявно Дефиниция 4. Аксиомата на Архимед може да се използва да запишем Дефиниция 5 (17а-г) така:

Ако

$$n \leq mb < (n+1)a,$$

(20а)

то:

$$nc \leq md < (n+1)d$$

(20б)

Това означава, че ако вторият член на пропорцията b взет в някаква кратност m (толкова пъти) е между две съседни кратности на първия член a, то същото ще важи и за третия и четвъртия член c и d. Така е при нашия пример 2: $\sqrt{2} = \sqrt{2}: 1 - 2$ е между $\sqrt{2}$ и $2\sqrt{2}$, а $\sqrt{2}$ е между 1 и 2, т.е. между един и два пъти взети съответни членове на пропорцията. За разлика от простия случай с рационални пропорции, в които имаме равенство, тук трябва да затворим ирационалните (несъизмерими) величини (членове на пропорцията) между две съседни цели величини. От затварянето на mb между две съседни кратности на a винаги следва затварянето на mc между същите две кратности на d. Затварянето е необходимо, защото несъизмеримите отношения нямат точен еквивалент в рационални отношения – не и с краен брой операции по измерване с алгоритъма на Евклид.

Както пише С.Офман[x], тази дефиниция показва, че при равенство на две пропорции нито едно съотношение на цели числа (*рационално число*, както днес го разбираме) не може да се вмести между тях:

От $na > mb$ следва $nc > md$,

От $na = mb$ следва $nc = md$,

$na < mb$ следва $nc < md$,

Дефиниция 5 (17а-г) може с помощта на дроби (същото може и с пропорции) да се превърне по пътя (21):

$$na > mb | :a$$

$$n > mb/a | : m$$

$$n/m > b/a$$

(21)

Получаваме този вариант на дефиницията:

От

$$n/m > b/a$$

(22а)

винаги следва

$$n/m > d/c$$

(22б)

От

$$n/m = b/a$$

(22в)

винаги следва

$$n/m = d/c,$$

От

$$n/m < b/a$$

(22г)

винаги следва

$$n/m < d/c$$

Ако едно рационално число *n/m* е по-голямо от едната пропорция *b/a*, то задължително е по-голямо и от другата *d/c*, ако равно на едната, ще е равно и на другата, а ако е по-малко от едната, ще е по-малко и от другата. Двете съотношения се смятат за равни, ако няма съизмеримо отношение помежду им. От съвременна гледна точка две различни ирационални числа винаги имат безброй много рационални числа, които ги разделят, тъй като **между всеки две** рационални числа винаги има още едно.

Дефиниция 5 е написана, за да приравни съотношения на ирационални страни към съотношения на рационални лица. В Книга VI, Предложение 1 казва:

> ***Предложение 1:***
>
> *Триъгълниците и успоредниците, които се намират под една и съща височина, се отнасят, един към друг, както основите им*

Това предложение се доказва именно чрез дефиниция 5, но ние можем да го видим от формулата за лице на триъгълник – страна по височина върху две (20):

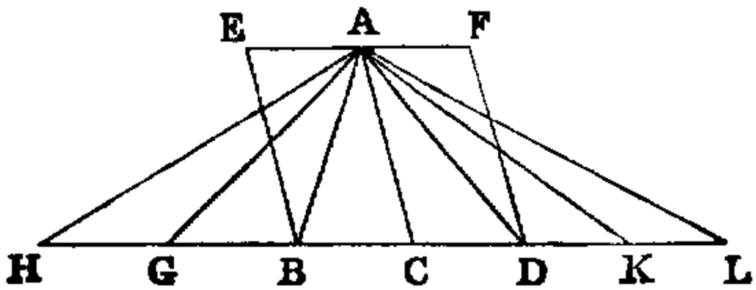
$$S = \frac{a.h_a}{2}$$

(23а)

$$\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = \frac{\frac{ah}{2}}{\frac{bh}{2}} = \frac{a.h}{b.h}$$

(23б)

Ако удвоим страната и запазим височината, ще удвоим лицето. Така можем да сложим знак за равенство между съотношения на несъизмерими величини (дължините на страните може да са такива) и съизмерими величини (лицата може да са цели числа при ирационални страни **и** височини). С дефиниция 5 можем да измерваме несъизмерими величини не чрез обща мярка, а чрез съизмерима пропорция *n:m*. Ако те имат еднакво отношение към *всяка* такава пропорция – или са едновременно по-малки, или едновременно равни (в случая на съизмерими величини), или едновременно по-големи, то те са равни помежду си.



Фигура 10. Елементи, Книга VI, Предложение 1[xi]

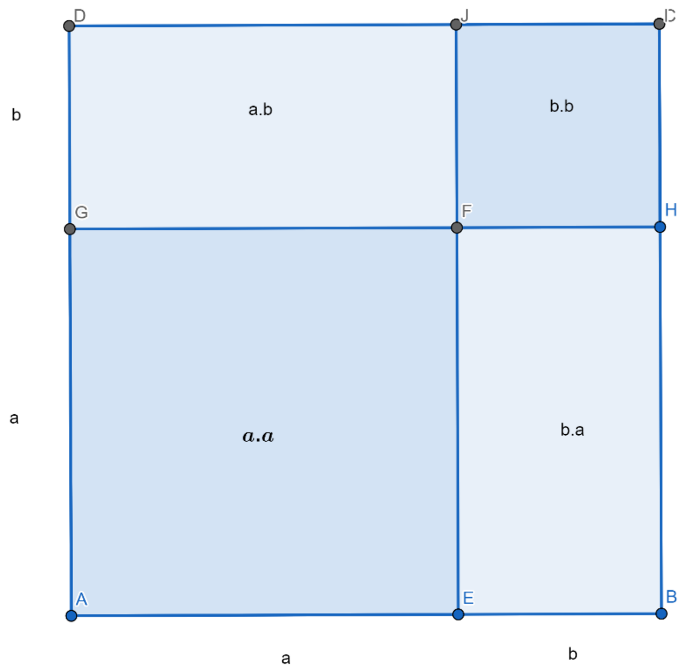
В книгата на Евклид доказателството следва следната логика:

Отсечките на Фиг.10 HG, GB, BC са равни помежду си, съответно и триъгълниците AHG, AGB и ABC ще имат равна площ (те са с една и същ височина). Триъгълникът AHC ще има три пъти по-голяма площ от ABC, защото основата му е три пъти по-голяма

$$HC = HG + GB + BC = 3BC \tag{24}$$

По същия начин CD, DC и KL са равни помежду си и триъгълникът ACL ще има три пъти по-голяма площ от ACD, защото и основата му CL ще бъде три пъти по-голяма. Двата триъгълника ABC и ACD в общия случай не са с равни основи, но и при двата имаме други триъгълници с трикратно по-голяма площ, защото основата им е три пъти по-голяма. Ако обаче *HC = CL*, то и площите на триъгълниците AHC и ACL са равни, ако *GC > CL*, то площта на AHC ще е по-голяма от тази на ACL, а ако *HC < CL*, ще е обратното. Тук имаме пропорция от типа *a:b = c:d*, в която на мястото на *a* имаме лицето на ABC, на мястото на *b* имаме лицето на ACD, на мястото на *c* имаме дължината на основата на ABC-BC, а на мястото на *d* имаме дължината на основата на ACD - CD. (Три)Кратните на тях ще са съответно AHC и AKL и HC и KL. Така спазваме дефиниция 5 и с нейна помощ установяваме, че отношенията на лица на триъгълници (и успоредници, които имат двойно по-големи лица от триъгълниците) може да изразят отношения на отсечки. Съизмерими отношения на лица могат да представят внесъизмерими отношения на отсечки.

Дефиниция 5 е тясно свързана с типа доказателство на Питагор, дадено от Евклид (Фиг.7) и цялостното построяване на математиката в Елементи. В Книга I той доказва теоремата на Питагор геометрично – квадратът на хипотенузата има същата площ, както сборът от квадратите на катетите. Причината е, че лицата на квадратите при гърците са *винаги съизмерими* – площите са цели числа, дори и когато страните им са непознаваеми (ирационални). Поради тази причина гръцките математици отхвърлят парадигмата на питагорейците „всичко е число“ и геометризират математиката, за да я поставят на строги логически основи. Единствено потенциалната безкрайност е в техния обхват и оттам само рационалните числа (разбирани от тях като отношения на цели числа – за тях всички числа са сборове от единици). С ирационалните числа те се занимават *косвено* – с техните площи (фигури с ирационални дължини на страните). По същия начин е построена и алгебрата в книга II – чрез вадене и прибавяне на лица на фигури (Фиг.11).



Фигура 11. Геометрично доказателство на формулата за съкратено умножение (21), отговаряща на Книга II, Предложение 7 от „Елементи“ на Евклид

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{21}$$

Докато някои съвременни коментатори твърдят, че гръцките математици не са схващали числата и геометричните величини като едно и също нещо, като теориите на двете са построени в две отделни книги – VII и V-та, то ние сме на мнението на Ван дер Варден. Теория на числовите пропорции в книга VII е дело на питагорейската школа **преди** откриването на несъизмеримите отношения (ирационалните числа). Руският коментатор на „Елементи на Евклид“ твърди, че у Евклид:

> *„не само няма взаимно еднозначно съответствие между геометричните величини и характеризиращите ги числа, но даже няма и идея за род, който да обхваща видовете понятия геометрична величина и число; тази идея се появява като резултат от по-нататъшната еволюция на математическата мисъл.“*

Позволяваме си да не се съгласим с това твърдение. Причината според нас Евклид да няма общо понятие за геометрична величина и число е, че за гръцките математици те не са еквивалентни. Съотношението между диагонала на квадрата и неговата страна се изразява с един безкраен процес на изваждане на отсечки – antanaireisis (Фиг.8) (10), което според тяхното разбиране означава, че такова число *не съществува* и няма точно взимно съответствие между диагонала и никое число. Разбирането им се корени в понятието „потенциална безкрайност“, което изяснихме по-горе. Гръцката математика според Ван дер Варден (и нас) не е по-примитивна, а по-строга логически. На гърците им липса разбирането за формалната страна на математиката, като игра по определени правила за събиране и изваждане, умножение и деление, но това не намалява логическата строгост на техните теории. Ролята на формалното е в обединяването на различни математически обекти по класове според техните свойства – това позволява третирането на геометрични задачи с алгебра, както прави пръв Рене Декарт, който ги свежда до решаване на уравнения. Това *не е развитие към по-голяма строгост*, която изисква уточняване на понятията, защото то изхвърля смисъла им от математиката. За правилата на смятане с букви няма значение какво стои наистина зад тях, *какво наистина* е точка или права, стига да може да намери чрез решаване на уравнение общата точка между две прави. Както Давид Хилберт пише[xii]:

> *“Човек трябва да може да казва по всяко време – вместо точки, прави линии и равнини – маси, столове и чаши за бира.”*

Актуалната безкрайност не може да се поддаде на правилата на логиката според гръцките математици, затова тя е изключена, а с нея и всички несъизмерими величини като (10). Те не са еквивалентни на геометрични величини, *защото не съществуват* в тази система. Старата питагорейска теория на числата от книга VII е заменена от теорията на Евдокс за ирационалните отсечки в книга V.

Постулатите на Евклид и потенциалната безкрайност

Логическите основи на математиката, систематизирана от Евклид, изключват актуалната безкрайност. Евклид специално включва постулати и аксиоми, които да го предпазят от възможни парадокси, при употребата на актуално безкрайното.

> ***Постулат 2.***
>
> *И всяка ограничена права (да може) да се продължава неограничено*

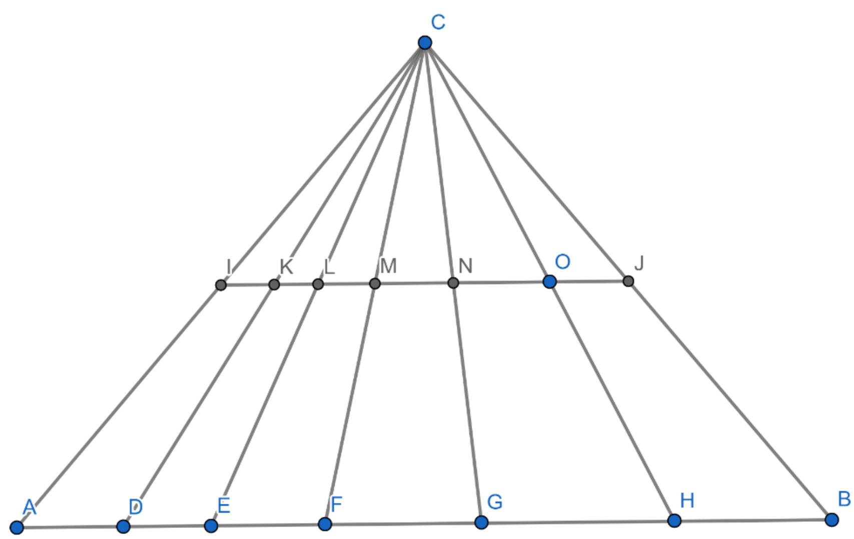
В този постулат не се казва, че правите са безкрайни. Безкрайността за тях не съществува действително, а само потенциално, като идея. Правите за гърците са това, което са отсечките за нас.

Всички аксиоми на Евклид явно формулират правила за смятане само с крайни количества, като особено важна е Аксиома 8:

> ***Аксиома 8.***
>
> *И цялото е по-голямо от частта.*

Това е пряк отговор на най-малко известната, но и най-важната апория на Зенон – апорията на мярката. Тя пита, ако (ограничена) права линия е съставена от безкрайно множество неделими (точката е неделима по Дефиниция 1 на Евклид) и те нямат своя дължина, как тя има дължина. А ако те имат свой размер, как тази права не е безкрайно дълга?

Пряко следствие на тази апория демонстрираме на Фиг.12. Имаме права линия AB и към нея от точка C са прекарани множество прави линии. Правата IJ минава през средите на AC и BC и е успоредна на AB, като дължината и е половината от тази на AB (лесно може да се докаже с подобни триъгълници). Правите, излизащи от C, пресичат в по една точка IJ и AB (през две точки минава една права по Постулат 1). Това прекарване на прави може да продължи неограничено и така за всяка точка на IJ да има точка от AB, въпреки че IJ е наполовина на AB. Така частта е равна на цялото.



Фигура 12. Апория на мярката

Тази апория е решена **частично** чрез теория на мярката през 20-ти век с идеята, че размерът на едно множество не се определя от неговите елементи, а от отношенията между тях. Така дължината се определя чрез система от вложени интервали, въпреки че в общия случай дори така има неизмерими множества.

Не всички дефиниции и постулати успяват да избегнат актуалната безкрайност. Дефиниция 23 и Постулат 5, определящи успоредните прави не успяват, въпреки своите внимателни формулировки.

Дефиниция 23.

Успоредни са такива прави, които се намират в една и съща равнина и при неопределено (неограничено) продължение в двете им страни не се срещат нито от едната, нито от другата страна.

Тази дефиниция не е нещо, което може да се демонстрира, да се изтъкне като очевидно, тъй като изисква да изследваме цялата безкрайност, за да установим нейната истина. Това е като да търсим липсата на нещо. Твърдението, че две прави се пресичат е лесно доказуемо, тъй като това включва наличието на само една точка, докато твърдението, че не се пресичат означава да сравним всички точки от правите в безкрайността. Дефиниция 23 и произтичащият от нея Постулат 5 са били обекти на критики и опити за доказателства хилядолетия, преди тяхното отхвърляне да създаде нов вид геометрии – неевклидовите. Единствените твърдения на Евклид, включващи актуалната безкрайност, се оказват слабото място на книгата.

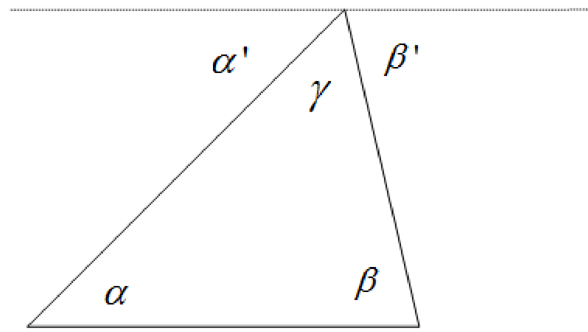
Логическата система на Евклид и ролята на абстрактното в математиката

Както Ричард Фейнман казва в знаменитите си лекции по физика, има два начина да се изгради математиката – гръцки и вавилонски[xiii]. Математическите твърдения са взаимозависими и образуват мрежа. С помощта на някаква част от твърденията в мрежата може да се докажат останалите и обратно – друга част от твърденията биха могли да докажат първоначалните. Например, с петия постулат на Евклид за успоредните прави и сбора от ъглите върху права линия можем да докажем, че сумата от ъглите на триъгълника са 180 градуса, но можем и по обратния път да докажем твърдението за връхните ъгли от другите две (Фиг.13):

Тъй като кръстните ъгли при права, пресичаща две успоредни са равни (*Предложение 1*), то $\alpha = \alpha'$ и $\beta = \beta'$. Тъй като сборът от ъглите върху правата линия е 180 градуса (*Предложение 2*) , т.е. $\alpha' + \beta' + \gamma = 180$, от двете заедно следва $\alpha + \beta + \gamma = 180$ (*Предложение 3*). Предложения 2 и 1 заедно доказват Предложение 3. Можем обаче да докажем и Предложения 2 чрез Предложения 1 и 3:

Имаме $\alpha = \alpha'$ и $\beta = \beta'$ и $\alpha + \beta + \gamma = 180$, следователно и $\alpha' + \beta' + \gamma = 180$ (*Предложение 2*). Можем ли обаче да докажем и Предложение 1, чрез Предложение 2 и 3?

Ако и $\alpha + \beta + \gamma = 180$ и $\alpha' + \beta' + \gamma = 180$, то $\alpha' + \beta' + \gamma = \alpha + \beta + \gamma$ и оттам $\alpha + \beta = \alpha' + \beta'$. Това е по-общо твърдение – сумата от ъглите на правите, пресичащи двете успоредни прави горе е равна на сумата от ъглите при пресичане долу. Явно от Предложение 2 и 3 не може да се отиде в Предложение 1. То е **първично**. Логическата система Евклид построил от първичните твърдения, които не можем да докажем, а другите поставил според тяхната сложност. *По-близките до интуицията,* по-нагледните, очевидните, по-простите твърдения се слагат преди по-сложните и неочевидните. По-близко до интуицията е, че ъглите върху права линия се допълват до 180 градуса, отколкото ъглите в триъгълника.



Фигура 13. Сумата от ъглите в триъгълника, питагорейско доказателство

Имаме взаимосвързана система от твърдения, които *не си противоречат* едно на друго.

В общия случай с геометрията мрежата е по-сложна, но е факт, че има много начини да се изгради непротиворечива теория. Тъй като теоремата на Питагор и петият постулат на Евклид са взаимозаменяеми, той би могъл да включи нея на мястото на постулата и да напише по друг начин книгата. Защо не е направил така? Отговор на това дава коментаторът на Евклид, Прокл:

> *За изходна точка на по-нататъшното търсене ще направим всяко нещо, което ни предлага по-изгодно поле за изследване и допринася към цялата философия, като с това подражаваме на питагорейците, между които бил широко разпространен девизът "фигура и стъпало, а не фигура и грош", което те разбирали, че заслужава изучаване на онази геометрия, която с всяка теорема поставя стъпало за по-нататъшно изкачване и издига духа нависоко, вместо да му позволи да се спусне между сетивните обекти и с това да удовлетвори низките потребности на смъртните хора и с тази долна цел да пренебрегне обръщането към висши неща.*
>
> *Прокл за Евклид*

За гърците геометрията е къща. Основите са дефинициите и аксиомите, върху които се построяват твърденията, всяко от които по-сложно и по-общо от предишното, отдалечаващо се от сетивното във висшите измерения на разума. С други думи – построено е от простото към сложното, с нови твърдения, допълващи теорията като река, която с всеки нов приток се разширява. Просто е това, което е по-нагледно, интуитивно и очевидно. Успоредността на правите е интуитивна, теоремата на Питагор не е. Това отличава гърците от всички други древни култури – те изграждат своите теории като постройки, които имат **посока и цел**. Евклидовата логическа система поради това е ненадминат образец на древността, първо защото е система и второ, защото е построена **елегантно**[xiv]:

Геометрията, която е изложена в Елементите на Евклид не е само сбирка от факти, а логическа система. Аксиомите, дефинициите и предложенията не са изброени в случайна последователност, а са разположени в безукорен ред. Всяко предложение е поставено на онова място, което може да се обоснове на базата на предишните аксиоми, дефиниции и предложения. Можем да считаме, че главното постижение на Евклид е в подреждането на твърденията, а тяхната логическа система е основното достойнство на Елементите. Евклидовата геометрия е не само една логическа система, но и първият и най-велик пример на такава система, на която другите науки са се опитвали и все още се опитват да подражават. Следва ли другите науки и по-специално онези, които са далеч от геометрията, като например психологията или правото, да подражават на строгата логика на Евклид? Този въпрос е спорен; но в него не може да вземе участие този, който не е запознат с Евклидовата система.

Системата на геометрията е споена с доказателства. Всяка теорема е свързана с предишните аксиоми, дефиниции и твърдения чрез доказателство. Без разбирането на тези доказателства не може да се схване самата същност на системата.

Накратко, ако общото образование възнамерява да даде на учащите се идеята за логическа система, то трябва да отдели място за геометрични доказателства.

Дьорд Пойа,
Как да се решава задача

Абстрактното мислене

Защо точките нямат свой размер, а правите нямат дебелина в Елементи на Евклид и геометрията след него? Защо Евклид дава следните дефиниции?

Дефиниция 1

Точка е това, което няма части.

Дефиниция 2

Линии – това е дължина без широчина.

Дефиниция 5

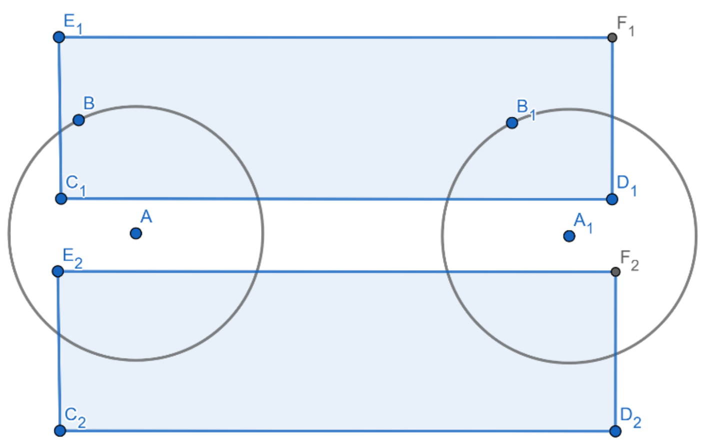
Повърхнина е това, което има само дължина и широчина.

Дефиниция 6

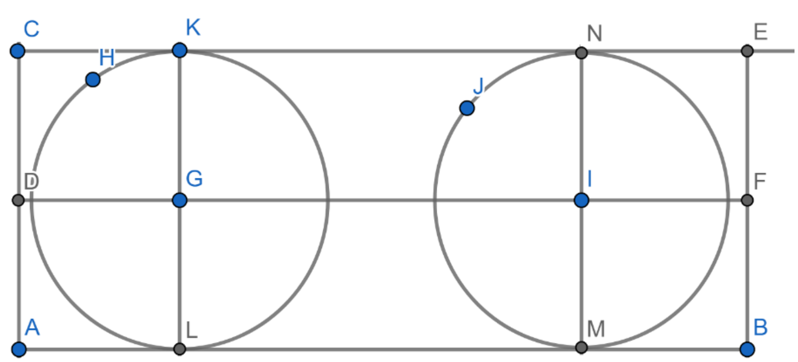
Краищата на повърхнина са линии.

Защото така е по-просто и всичко друго въвежда излишно усложнени дефиниции и теореми, които **пак** се свеждат до безразмерни точки и прави.

Ако точките имат размерности, трябва да уточним колко големи са и с каква форма. Най-простото е да са кръгли. Правите трябва да уточним колко дебели са и с каква форма. Най-простото е да са правоъгълници. По този начин между две точки ще могат да минат безкраен брой прави (Фиг.14). Ако широчината на правите и на точките е една и съща, все още може да има безброй прави между две точки, затова трябва да **уточним**, че правата минава през двете точки-окръжности както е на Фиг.15 – *нейната граница*, която се състои от две прави линии без дебелина, трябва да допира точката-окръжност в две диаметрално противоположни точки, които са *безразмерни*. Ето че пак се наложи да ползваме точки без размери и прави линии без дебелина, тогава защо трябваше да си правим труда в опита да избягаме от абстрактното?



Фигура 14. Полуабстрактни прави през полуабстрактни точки – през две точки могат да минат безкрайно много прави



Фигура 15. Полуабстрактна права, еднозначно пресичаща две полуабстрактни точки.

Точките, линиите и повърхнините са *граници*. Ограничните линии започват и завършват в точки, а повърхнините и фигурите започват и завършват в линии. Всяка двумерна фигура се превръща в точка, когато се смалява до нулата и по двете измерения, или до права, ако се смалява по едно от тях, по-точно до крайна отсечка. Абстрактното е границата на мисълта, която може да отдели съжденията само *чрез* него. Абстрактното мислене отделя границите от това, което ги изпълва и работи с тях – *абстрахира същественото*, за да произведе резултати. Древногръцката математика е първият образец на абстрактно мислене – еталон, по който се сравняват всички науки, поради и което Платон е изисквал от учениците в Академията задълбочено изучаване на геометрията.

---

[i] Евклид, Елементи, Б.Петканчин (ред), В. Чуканов (прев.) ... Наука и Изкуство, 1972

[ii] Използваме означенията на Ван дер Варден, Пробуждаща се наука, Наука и Изкуство, 1968

[iii] L.Filep, Pythagorean diagonal and side number, Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Ny regyhaziensis 15 (1999), 1{7}, https://www.emis.de/journals/AMAPN/vol15/filep.pdf?fbclid=IwAR26w6j8xXqWHNqdnWttXQQ4Z5MYSAW_6v_e2W8Z-AddzZSuNfRubIxkb-0

[iv] Л. Томов, Зенон, Питагор и Делимостта, Българска наука, 112, 2018, https://nauka.bg/bgnauka112/

[v] Платон, Менон, Г.Михайлов, Б. Богданов (прев.), Наука и Изкуство, 1982

[vi] Платон, Парменид, Ц. Бояджиев (прев.), Изток-Запад, 2018

[vii] Г.К.Честъртън, Вечният човек, О.Василев (бележки), Омофор, 2005

[viii] http://classics.mit.edu/Aristotle/physics.3.iii.html

[ix] Coming to be and passing away does not give out – за концепцията на Аристотел виж Shorey, Coming-to-be and passing away, Classical Philology, Vol. 17, No. 4 (Oct., 1922), pp. 334-352 https://www.jstor.org/stable/263008

[x] S.Ofman, Theory of Ratios in Euclid's Elements Book V revisited, https://webusers.imj-prg.fr/~salomon.ofman/Euclid-theory-of-ratio.pdf

[xi] https://www.gutenberg.org/files/21076/21076-h/21076-h.htm

[xii] К. Рийд, Д. Хилберт, Наука и Изкуство, 1972

[xiii] https://www.youtube.com/watch?v=YaUlqXRPMmY

[xiv] Д. Пойа, Как да се решава задача, Народна Просвета, 1972